Zahlen

In der Natur gibt es keine Zahlen. Zahlen sind gedankliche Gebilde der Menschen. Gehen Sie in einen unberührten Wald und sie werden dort keine einzige Zahl finden, steigen Sie auf einen unbewohnten Berg, tauchen Sie in einen Fluß oder fahren Sie auf´s Meer, Sie werden nirgendwo eine Zahl entdecken – es sei denn, irgendein Mensch hat sie dorthin gemalt.
Was ist nun eine Zahl? Eine Zahl ist entweder das Verhältnis zweier realer Mengen (eine große Schafherde durch eine kleine Schafherde) oder zweier Größen (ein langer Stab durch einen kurzen Stab). In beiden Fällen bleibt ein Quotient ohne jede Bedeutung übrig.

Die Mathematiker der Antike beschäftigten sich viel mit Geometrie und sie bestimmten die Längen und Flächen von Dreicken und Kreisen, oder das Volumen von 3-dimensionalen Körpern wie einer Kugel. Eine Länge ist eine Größe und der Wert einer Größe ist nur als Vielfaches eines Maßstabes (Längeneinheit) bestimmbar. Zur Darstellung aller Verhältnisse in der Natur reichen die natürlichen Zahlen vollkommen aus, denn Alles ist als Vielfaches einer Mengeneinheit (z.B. 1 Blatt, 1 Baum) oder einer Größeneinheit (z.B. 1 Elle, 1 Tag) darstellbar.
Alle anderen Zahlen (negative, irrationale, komplexe) sind Erfindungen des Menschen, um reine mathematische Operationen uneingeschränkt durchführen zu können. Mathematische Operationen haben aber nur bedingt etwas mit realen Operationen zu tun. Subtrahiert man eine größere Zahl von einer kleineren Zahl, braucht man die negativen Zahlen, um ein Ergebnis darstellen zu können. Man kann aber nicht 20 Kartoffeln von 10 Kartoffeln abziehen. Will man eine Zahl finden, die mit sich selbst multipliziert eine natürliche Zahl darstellen soll, braucht man die Wurzeln und stößt auf irrationale Zahlen (wie z.B. Bei Wurzel aus 2), die es in der Natur nicht gibt. Will man wiederum die Wurzel aus einer

negativen Zahl ziehen, braucht man die komplexen Zahlen, usw. usf.
Sicher haben die Erweiterungen der Zahlenbereiche zu vielen Vereinfachungen in der Beschreibung realer Vorgänge geführt (wie z.B. e hoch iwt zur Beschreibung von Wechselströmen), aber das sind nur Beschreibungen realer Vorgänge, nicht der Vorgang selber!

Definition über Mengenlehre

Eine Zahl versteht man besten über die Mengenlehre. Aus der Vielfalt der uns umgebenden Realität betrachten wir eine beliebige Menge, z.B. eine Schafherde, suchen uns das kleinste Element dieser Menge heraus, nämlich „ein Schaf“ und dividieren die Schafherde durch das kleinste Element. Heraus kommt die Anzahl der Schafe in der Schafherde – und diese Anzahl nennen wir Zahl. Angenommen in der Schafherde waren 100 Schafe, dann bedeutet „100“ die Anzahl der Schafe in der Schafherde. Durch die Division mit dem kleinsten Element verliert man die Einheit der Menge – die Zahl selber ist also einheitenlos. *IE, 2016*
Man kann auch über die Zerlegung einer realen Menge in Teilmengen vorgehen. Die reale Menge ´Schafherde´ zerlegen wir in so viele Teilmengen mit nur einem Mengenelement wie möglich. Jedes Vielfache der kleinsten Teilmenge ergibt eine Zahl und jedes Vielfache erhält eine Bezeichnung: zwei Schafe, drei Schafe, …, hundert Schafe.

Zahlendarstellung

Zahlen sind keine realen Objekte. Sie sind gedanklichen Abstraktionen, die man nur mit Hilfe von Symbolen darstellen kann. Im allgemeinen halten wir die Symbole für Zahlen, weil wir von Kindheit damit aufgewachsen sind: das Symbol 3 sei die Zahl drei. Aber auch das Wort ´drei´ ist nur ein Symbol, genauso wie die römische Schreibweise III oder die binäre

Darstellung LL.
Zur Darstellung von Zahlen nutzen wir Stellenwertsysteme. Am bekanntesten ist das dekadische Stellenwertsystem. (Bitte benutzen Sie für weitere Informationen zur Zahlendarstellung die einschlägige Fachliteratur, da ich diese an dieser Stelle nur wiederholen würde. Für mich ist die Erkenntnis wichtig, daß die Darstellung der Zahlen nicht die Zahlen selber sind!)

Axiome der Arithmetik

Es gibt eine Zahl Null (entspricht einer leeren Menge). Für die Addition einer beliebigen Zahl n mit Null gilt: n + 0 = n

Es gibt eine Zahl 1 (entspricht der kleinsten, nicht leeren Teilmenge einer Menge). Für die Multiplikation einer beliebigen Zahl n mit 1 gilt: n * 1 = n

Die 1 ist der Nachfolger von 0. Jede Zahl hat einen Nachfolger der Art a + 1 = b.

Außer der 0 hat jede Zahl einen Vorgänger der Art b – 1 = a.

Diese Axiome gehen auf den italienischen Mathematiker G Peano zurück, der sie 1891 aufgestellt hat.

Zahlen sind keine Größen

„Für die griechischen Mathematiker waren Zahlen konkrete, wahrnehmbare Größen, die Eigenschaften realer Objekte darstellten. Somit war die Geometrie gleichbedeutend mit dem Messen gewesen. Die Null war für die antiken Mathematiker undenkbar. Auch negative Größen hatten keinen Platz in der klassischen Auffassung von der Welt. Die Auffassung, daß Zahlen Größen ausdrücken, blieb 2 Jahrtausende unangefochten. Die entscheidende Wandlung wurde 1591 durch Vieta herbeigeführt, der begann, Buchstaben statt Zahlen zu verwenden. Mit dem Begriff der Variablen wurde die Zahl als Größenvorstellung auf einen zweitrangigen Platz verdrängt. Im

Gegensatz zu den Zahlen haben Variable keine ihnen innewohnende Bedeutung. Wie täuschend die Bedeutung von Zahlen als Größenangaben sind, geht aus einem Artikel von J David Stern hervor, der sich mit der Staatsschuld der USA befaßt, welche von 257 Milliarden Dollar im Jahre 1947 auf 304 Milliarden Dollar im Jahre 1962 anstieg.“ Prof. Paul Watzlawick (in Menschliche Kommunikation, 2007, 11. unv. Auflage, S. 24, Fn 1)

> *Kommentar: Was die Zahlen für griechische Mathematiker waren, kann ich nicht beurteilen, aber der Herr Psychologie-Professor haut alles durcheinander. Zahlen sind definitiv keine* Größen*, sondern eben Zahlen. Negative Größen gibt es auch heute nicht in der Natur. Die Negation kommt entweder durch die Festlegung eines Bezugspunktes zustande, wie z.B. bei der Grad Celsius-Skala der Temperatur, oder für die Verwendung als Richtungsangabe (entgegengesetzt zur Richtung des positiven Betrages der Größe). Auch die Einführung von Variablen hat nichts an dem Unterschied zwischen Größe und Zahl geändert. v als Symbol für eine variable Geschwindigkeit, symbolisiert eine Größe. x als Symbol für eine beliebige Zahl symbolisiert eine Zahl. Zwischen v als Symbol der Geschwindigkeit und x als Symbol für eine beliebige Zahl liegen aber Welten, auch wenn es beides Buchstaben sind. 257 Mrd Dollar sind im übrigen eine reale Menge, was wiederum etwas völlig anderes ist als eine Zahl oder eine Größe!*

historisches

2.000 vuZ Darstellung der Zahlen durch ein Stellenwertsystem
540 vuZ Irrationale Zahlen
Zahlentheorie von Descartes

Querverweise

Variablen